3 Le proprietà dei radicali

Per eseguire i calcoli con i radicali, in alcuni casi conviene non calcolarli esplicitamente, ma eseguire prima le operazioni. Per farlo è utile conoscere alcune proprietà.

- **Radicale di un prodotto**
  Osserviamo i seguenti prodotti:

$$\sqrt{9\cdot 4}=\sqrt{36}=6 \qquad \sqrt{9}\cdot\sqrt{4}=3\cdot 2=6$$

Abbiamo ottenuto lo stesso risultato.

A PAROLE	IN SIMBOLI
Il **radicale di un prodotto** è uguale al prodotto dei radicali dei singoli fattori.	$\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$

Usando questa proprietà è possibile calcolare il prodotto di radicali anche se i singoli fattori non sono radicali esatti.

esempio

$\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{18\cdot 2}=\sqrt{36}=6$

$\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}=\sqrt{3\cdot 27}=\sqrt{81}=9$

Possiamo, inoltre, dedurre altre regole.

Esempi	Regole
$(\sqrt[5]{3})^2=\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[5]{3}=\sqrt[5]{3\cdot 3}=\sqrt[5]{3^2}$	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$
$(\sqrt[5]{3})^5=\sqrt[5]{3^5}=3$	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$
$\sqrt[5]{3^{11}\cdot 2^3}=\sqrt[5]{3^{10}\cdot 3\cdot 2^3}=$ $=\sqrt[5]{(3^2)^5\cdot(3\cdot 2^3)}=\sqrt[5]{(3^2)^5}\cdot\sqrt[5]{(3\cdot 8)}=$ $=3^2\cdot\sqrt[5]{24}=9\cdot\sqrt[5]{24}$	$\sqrt[n]{a^{n\cdot q}\cdot b^m}=a^q\cdot\sqrt[n]{b^m}$

Vediamo se $\sqrt[4]{20\,736}$ è un radicale perfetto e, in tal caso, calcoliamo la radice. Scomponiamo in fattori primi il radicando: $20\,736=3^4\cdot 2^8$. Allora

$$\sqrt[4]{20\,736}=\sqrt[4]{3^4\cdot 2^8}=\sqrt[4]{3^4}\cdot\sqrt[4]{2^8}=\sqrt[4]{3^4}\cdot\sqrt[4]{(2^2)^4}=3\cdot 2^2=3\cdot 4=12$$

Seguendo questo esempio abbiamo un criterio per sapere se un radicale è esatto oppure no ed eventualmente un metodo per calcolarlo.

> Un radicale di indice n è un radicale esatto se nel radicando, scomposto in fattori primi, compaiono solo potenze il cui esponente è un multiplo di n. In tal caso la radice è un numero naturale e si ottiene moltiplicando tra loro i fattori che compaiono nel radicando e dividendo ciascun esponente per l'indice della radice.

- **Radicale di un quoziente**
  Osserviamo le seguenti divisioni:

$$\sqrt{400:16}=\sqrt{25}=5 \qquad \sqrt{400}:\sqrt{16}=20:4=5$$

Anche in questo caso, nei due procedimenti, abbiamo ottenuto lo stesso risultato.

A PAROLE	IN SIMBOLI
Il **radicale di un quoziente** è uguale al quoziente dei radicali dei singoli fattori.	$\sqrt[n]{a:b}=\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}$

Questa proprietà ci permette di estendere l'operazione di estrazione di radice anche alle frazioni:

$$\sqrt{\frac{25}{16}}=\sqrt{25:16}=\sqrt{25}:\sqrt{16}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}}=\frac{5}{4}$$

Possiamo più in generale dire che

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

e distinguere due casi:

- se i radicali a numeratore e denominatore sono entrambi esatti, allora il radicale del numero razionale è un numero razionale;
- se uno dei due radicali a numeratore o denominatore non è un radicale esatto, il risultato non è un numero razionale.

esempio

$\sqrt[4]{\frac{16}{81}}=\frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}}=\frac{2}{3}\in\mathbb{Q}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{\frac{24}{125}}=\frac{\sqrt[3]{2^3\cdot 3}}{\sqrt[3]{5^3}}=\frac{2\cdot\sqrt[3]{3}}{5}\notin\mathbb{Q}$

$\sqrt[4]{\frac{256}{486}}=\frac{\sqrt[4]{2^8}}{\sqrt[4]{2\cdot 3^5}}=\frac{2^2}{\sqrt[4]{3^4\cdot 3\cdot 2}}=\frac{4}{3\cdot\sqrt[4]{3\cdot 2}}=\frac{4}{3\cdot\sqrt[4]{6}}\notin\mathbb{Q}$

Addizione e sottrazione di radicali simili

Osserviamo i seguenti esempi:

$$\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{3^3\cdot 2}=3\cdot\sqrt[3]{2} \qquad \sqrt[3]{250}=\sqrt[3]{5^3\cdot 2}=5\cdot\sqrt[3]{2}$$

I due radicali assegnati, semplificati, sono entrambi il prodotto di un numero naturale e di due radicali uguali. Diremo che i due radicali sono **radicali simili**.
Se due radicali sono simili possono essere sommati e sottratti, come puoi vedere in questi esempi.

esempio

$5\cdot\sqrt[3]{2}+2\cdot\sqrt[3]{2}=(5+2)\cdot\sqrt[3]{2}=7\cdot\sqrt[3]{2}$

$5\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{3}=(5-2)\cdot\sqrt{2}+\sqrt{3}=3\cdot\sqrt{2}+\sqrt{3}$

> Se i radicali non sono simili, non ci sono modi per addizionarli o sottrarli se non svolgendoli. In particolare:
> $\sqrt[n]{a+b}\neq\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$
>
> Infatti $\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\cdot\sqrt{5}$
> mentre
> $\sqrt{4}+\sqrt{16}=2+4=6$

prime competenze